



ce
pre
UNI

Trigonometría

- ✓ PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
- ✓ FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS GENERALIZADAS

**CICLO
PRE 2024 - I**



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. PROPIEDADES DE DEFINICIÓN

1.1 PROPIEDAD

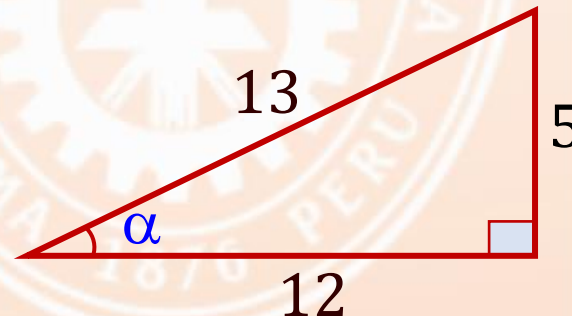
$$\alpha = \arcsen(n) \Leftrightarrow \sen(\alpha) = n, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\alpha = \arctan(n) \Leftrightarrow \tan(\alpha) = n, \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\alpha = \operatorname{arccsc}(n) \Leftrightarrow \csc(\alpha) = n, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

Ejemplo: Si: $\alpha = \arcsen\left(\frac{5}{13}\right) \Rightarrow \sen(\alpha) = \frac{5}{13}, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow \sen(\alpha) = \frac{5}{13}, \alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



1.2 PROPIEDAD

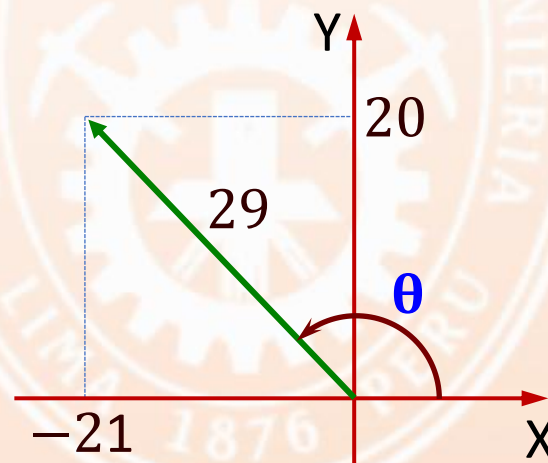
$$\alpha = \arccos(n) \Leftrightarrow \cos(\alpha) = n, \alpha \in [0; \pi]$$

$$\alpha = \operatorname{arccot}(n) \Leftrightarrow \cot(\alpha) = n, \alpha \in \langle 0; \pi \rangle$$

$$\alpha = \operatorname{arcsec}(n) \Leftrightarrow \sec(\alpha) = n, \alpha \in [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

Ejemplo: Si: $\theta = \arccos\left(-\frac{21}{29}\right) \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{21}{29}, \theta \in [0; \pi]$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{21}{29}, \theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$$



Problema 1

Calcule el valor de:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

A) $\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{\pi}{3}$

E) $\frac{2\pi}{3}$

CLAVE: E

02. PROPIEDAD

$$FT(\text{arcFT}(x)) = x; \forall x \in \text{Dom}(\text{arcFT})$$

$$\text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{cos}(\text{arccos}(x)) = x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{tan}(\text{arctan}(x)) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{cot}(\text{arccot}(x)) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{sec}(\text{arcsec}(x)) = x, \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$\text{csc}(\text{arccsc}(x)) = x, \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$\text{sen}(\text{arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{cos}(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$$

Ejemplos:

$$* \cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$$

$$* \text{sen}\left(\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$* \text{tan}(\text{arctan}(\sqrt{3})) = \sqrt{3}$$

$$* \text{sen}\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Demostración

$$\boxed{\checkmark} \quad \text{sen}(\arcsen(x)) = x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{sen}(\underbrace{\arcsen(x)}_{\alpha})$$

$$\rightarrow \text{sen}(\alpha) = x$$

$$\rightarrow \text{sen}(\arcsen(x)) = x$$

$$\boxed{\checkmark} \quad \text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{sen}(\underbrace{\arccos(x)}_{\theta})$$

$$\rightarrow \cos(\theta) = x, \theta \in [0; \pi]$$

$$\text{Como: } \text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

$$\text{y dado que } \text{sen}(\theta) \geq 0 \rightarrow \text{sen}(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$$

$$\therefore \text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Problema 2

Calcule: $\sin\left(\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

CLAVE: E

Problema 3

Resuelva la ecuación: $\csc^2(\operatorname{arccot}(x\sqrt{3})) = 1 + \sin^2(\arccos(x))$

A) $\{-1; 1\}$ B) $\{-1/2; 1/2\}$ C) $\{-1/3; 1/3\}$ D) $\{-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\}$ E) $\{-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\}$

CLAVE: B

Problema 4 (Segundo examen parcial 2017 II)

Si: $\arcsen\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2 \arctan(x) = \frac{2\pi}{3}$, con $x \in \langle 0,1 \rangle$.

Calcule el valor de $\sin(\sqrt{3}\pi x) + \cos(\sqrt{3}\pi x)$

- A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) 0

CLAVE: A

Problema 5

Determine el rango de la función f definida por:

$$f(x) = [\cos(3\arcsen(x)) - \sin(3\arccos(x))]^2$$

- A) $[0; 2]$ B) $[0; 1]$ C) $[0; 6]$ D) $[0; 4]$ E) $[0; \sqrt{2}]$

CLAVE: D

03. PROPIEDAD

$$\text{arcFT}(\text{FT}(\theta)) = \theta; \forall \theta \in \text{Ran}(\text{arcFT})$$

$$\arcsen(\text{sen}(\theta)) = \theta; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\cos(\theta)) = \theta; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\arctan(\tan(\theta)) = \theta; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arccot}(\cot(\theta)) = \theta; 0 < \theta < \pi$$

$$\text{arcsec}(\sec(\theta)) = \theta; 0 \leq \theta \leq \pi; \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arccsc}(\csc(\theta)) = \theta; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \theta \neq 0$$

Ejemplos:

$$* \arcsen\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{7}$$

$$* \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \frac{3\pi}{5}$$

$$* \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

$$* \text{arccot}(\cot(3)) = 3$$

$$* \text{arcsec}(\sec(2)) = 2$$

$$* \text{arccsc}(\csc(1)) = 1$$

Otros ejemplos:

$$* \operatorname{arcsen} \left(\sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) \neq \frac{5\pi}{6} \quad \text{porque} \quad \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Como: } \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \operatorname{arcsen} \left(\sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = \operatorname{arcsen} \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{6}$$

$\downarrow \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

$$* \operatorname{arccos} \left(\cos \left(\frac{12\pi}{7} \right) \right) \neq \frac{12\pi}{7} \quad \text{porque} \quad \frac{12\pi}{7} \notin [0; \pi]$$

$$\text{Como: } \cos \left(\frac{12\pi}{7} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \Rightarrow \operatorname{arccos} \left(\cos \left(\frac{12\pi}{7} \right) \right) = \operatorname{arccos} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right) = \frac{2\pi}{7}$$

$\downarrow \frac{2\pi}{7} \in [0; \pi]$

Otros ejemplos:

$$* \arcsen(\underbrace{\sen(3)}) \neq 3 \quad \text{porque} \quad 3 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsen(\sen(\pi - 3)) = \pi - 3$$

$$\text{porque} \quad (\pi - 3) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$* \arccos(\underbrace{\cos(5)}) \neq 5 \quad \text{porque} \quad 5 \notin [0; \pi]$$

$$\arccos(\cos(2\pi - 5)) = 2\pi - 5$$

$$\text{porque} \quad (2\pi - 5) \in [0; \pi]$$

$$\text{Si } \alpha + \beta = \pi,$$

$$\sen(\alpha) = \sen(\beta)$$

$$\sen(\alpha) = \sen(\pi - \alpha)$$

$$\text{Si } x + y = 2\pi,$$

$$\cos(x) = \cos(y)$$

$$\cos(x) = \cos(2\pi - x)$$

Problema 6

Calcule el valor de:

$$\frac{1 + \arcsen(\sen(2)) + \arcsen(\sen(3))}{\arccos(\cos(4))}$$

A) $\frac{1}{2}$

B) 1

C) 2

D) 4

E) 8

CLAVE: B**Problema 7**Calcule: $\arctan(\tan(9)) + \arctan(\tan(2)) + \arctan(\tan(7))$

A) $3 + \pi$

B) $6 + \pi$

C) $6 - 12\pi$

D) $18 - 6\pi$

E) $16 + 4\pi$

CLAVE: D

Problema 8

Sea: $A = \sum_{\theta=1}^3 \arccos(\cos\theta)$ y $B = \sum_{\theta=1}^3 \arcsen(\sen\theta)$

Calcule el valor de $A - B$

- A) $2(\pi + 10)$ B) $2(5 - \pi)$ C) $2(\pi - 5)$ D) $2(\pi + 5)$ E) $2(4 - \pi)$

CLAVE: B

04. PROPIEDAD

$$\forall x \in [-1; 1]: \arcsen(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle, \operatorname{arcsec}(x) + \operatorname{arccsc}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Demostración

$$\arcsen(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2} ; \forall x \in [-1; 1]$$

$$\text{Sean: } \alpha = \arcsen(x) \Rightarrow \sen(\alpha) = x, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\beta = arccos(x) \Rightarrow \cos(\beta) = x, \beta \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow \sen(\alpha) = \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$$

$$\text{Dado que } \alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \arcsen(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Lqdd

Problema 9

Dada la función f , definida por

$$f(x) = |\arccos(x)| + \arcsen(x) + \arctan(2x) + |\operatorname{arccot}(2x)| + \pi x,$$

determine el rango de la función f .

A) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

B) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

C) $[0; 2\pi]$

D) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

E) $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$

CLAVE: C

Problema 10 (Problema 21 del 2do material de estudio 24-2)

Dada la función f , definida por

$$f(x) = |\arccos(x)| + \arcsen(x) + |\arctan(x)|,$$

determine el rango de la función f .

A) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

B) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

C) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

D) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right]$

E) $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$

CLAVE: C

05. PROPIEDAD

$$\forall x \in [-1; 1]: \arcsen(-x) = -\arcsen(x)$$

$$\forall x \in [-1; 1]: \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

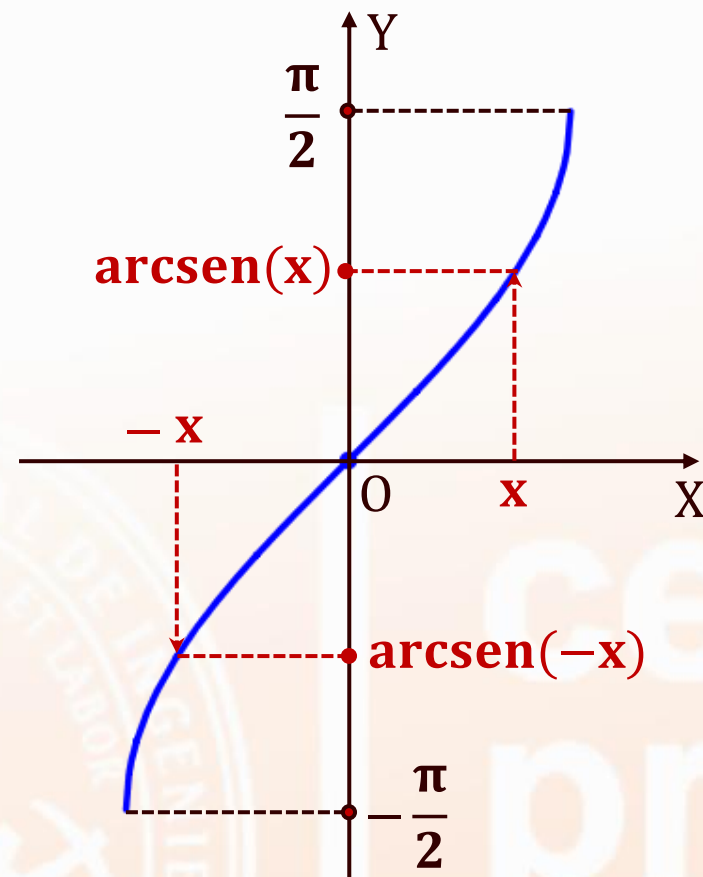
$$\forall x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle: \operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc}(x)$$

Ejemplos:

$$\arcsen(1) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \longrightarrow \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$



$$\arcsen(-x) = -\arcsen(x)$$

06. PROPIEDAD

$$\forall x \in [-1; 1]: \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$$

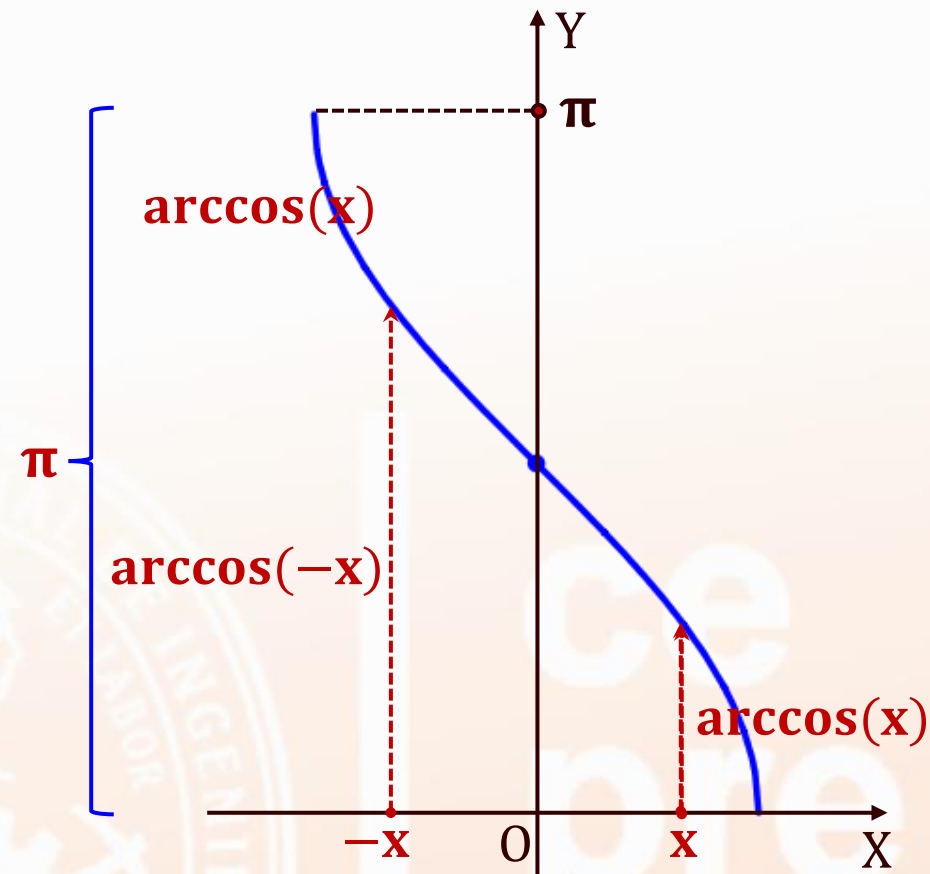
$$\forall x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle: \operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec}(x)$$

Ejemplos:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \longrightarrow \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{arccot}(1) = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{arcsec}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{\pi}{12} \longrightarrow \operatorname{arcsec}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) = \frac{11\pi}{12}$$



$$\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$$

Problema 11

Dada la siguiente ecuación:

$$\arctan(-x) = \frac{\arctan x + \operatorname{arccot}(-x)}{3}$$

Calcule el valor de $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

- A) $2\sqrt{5} - 1$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\sqrt{5}$ D) $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

CLAVE: B

07. PROPIEDAD

$$\arctan(x) + \arctan(y) = n\pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

El valor de n depende de x e y :

- i) Si $xy < 1 \Rightarrow n = 0$
- ii) Si $xy > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow n = 1$
- iii) Si $xy > 1 \wedge x < 0 \Rightarrow n = -1$

08. PROPIEDAD

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+: \arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

Problema 12

Calcule el valor de la expresión:

$$M = \frac{\arctan(4) + \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right)}{\pi - \arctan\left(\frac{49}{43}\right)}$$

A) -1 B) 1 C) -2 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

CLAVE: B

Problema 13 (Segundo examen parcial 2023 I)

Si se cumple que:

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) + \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{1}{200}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Calcule el valor de n.

A) 14

B) 13

C) 9

D) 11

E) 10

CLAVE: E

Problema 14 (Segundo examen parcial 2023 I)

Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I) La función $f(x) = \operatorname{arccot} x$ es creciente en todo su dominio

A) FVV

D) VVV

II) La función $f(x) = \arccos x + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ es constante

B) FVF

E) VFF

III) Si $x = \tan(a) \rightarrow 2a = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

C) VVF

CLAVE: B

09. PROPIEDAD

$$x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1; 1 \rangle \Rightarrow \operatorname{arccsc}(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x > 0 \Rightarrow \operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1; 1 \rangle \Rightarrow \operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x < 0 \Rightarrow \operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Demostración

$$\operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x < 0$$

$$\text{Sea: } \theta = \operatorname{arccot}(x), \quad x < 0$$

$$\Rightarrow \cot(\theta) = x, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta - \pi) = \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta - \pi < 0$$

$$\Rightarrow \theta - \pi = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lqdd

Problema 15

Determine el rango de la función f definida por:

$$f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x), \text{ si } x < 0.$$

- A) $\langle 0; \pi \rangle$ B) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$ D) $\langle -\pi; 0 \rangle$ E) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

CLAVE: A



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS GENERALIZADAS



pre
UNI

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS GENERALIZADAS

Son funciones cuyas reglas de correspondencia son de la forma

$$f(x) = A \cdot \text{arcFT}(Bx + C) + D$$

$$\begin{cases} A, B \in \mathbb{R} - \{0\} \\ C, D \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplos

a) $f(x) = 2\arcsen(3x - 1) + \pi$

d) $t(x) = 5\text{arccot}(1 - 2x) + \frac{\pi}{3}$

b) $g(x) = -3\arccos\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{6}$

e) $s(x) = 3\text{arcsec}\left(\frac{3x + 1}{2}\right) - 2\pi$

c) $h(x) = 6\arctan\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}$

f) $p(x) = -10\text{arccsc}\left(3 - \frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{5}$

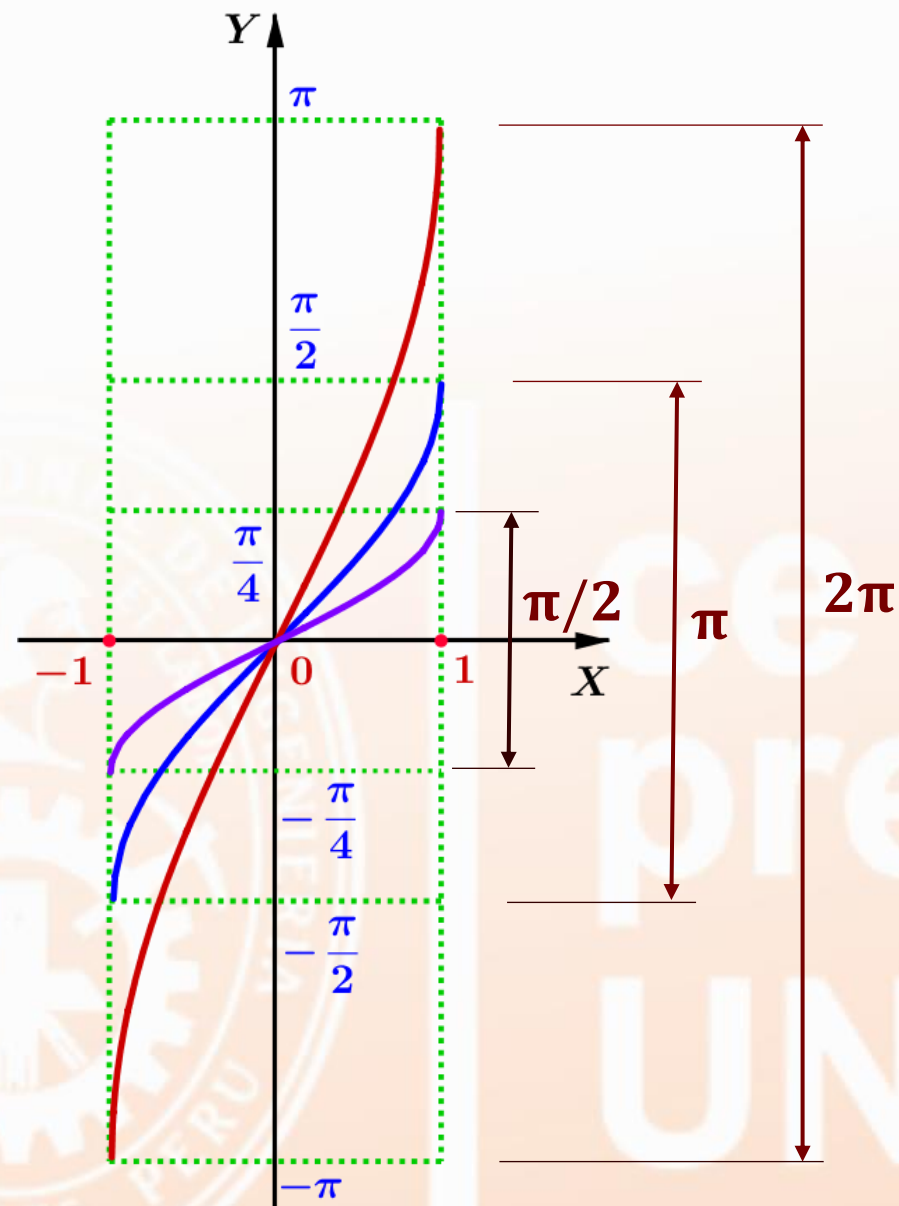
1. Expansión o contracción vertical

$$f(x) = A \cdot \text{arcFT}(Bx + C) + D \quad (A > 0)$$

Grafiquemos:

	Dominio	Rango
$y = \arcsen(x)$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = 2\arcsen(x)$	$[-1; 1]$	$[-\pi; \pi]$
$y = \frac{1}{2}\arcsen(x)$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

- ✓ Cuando $A > 1$, la gráfica se expande verticalmente.
- ✓ Cuando $0 < A < 1$, la gráfica se contrae verticalmente.



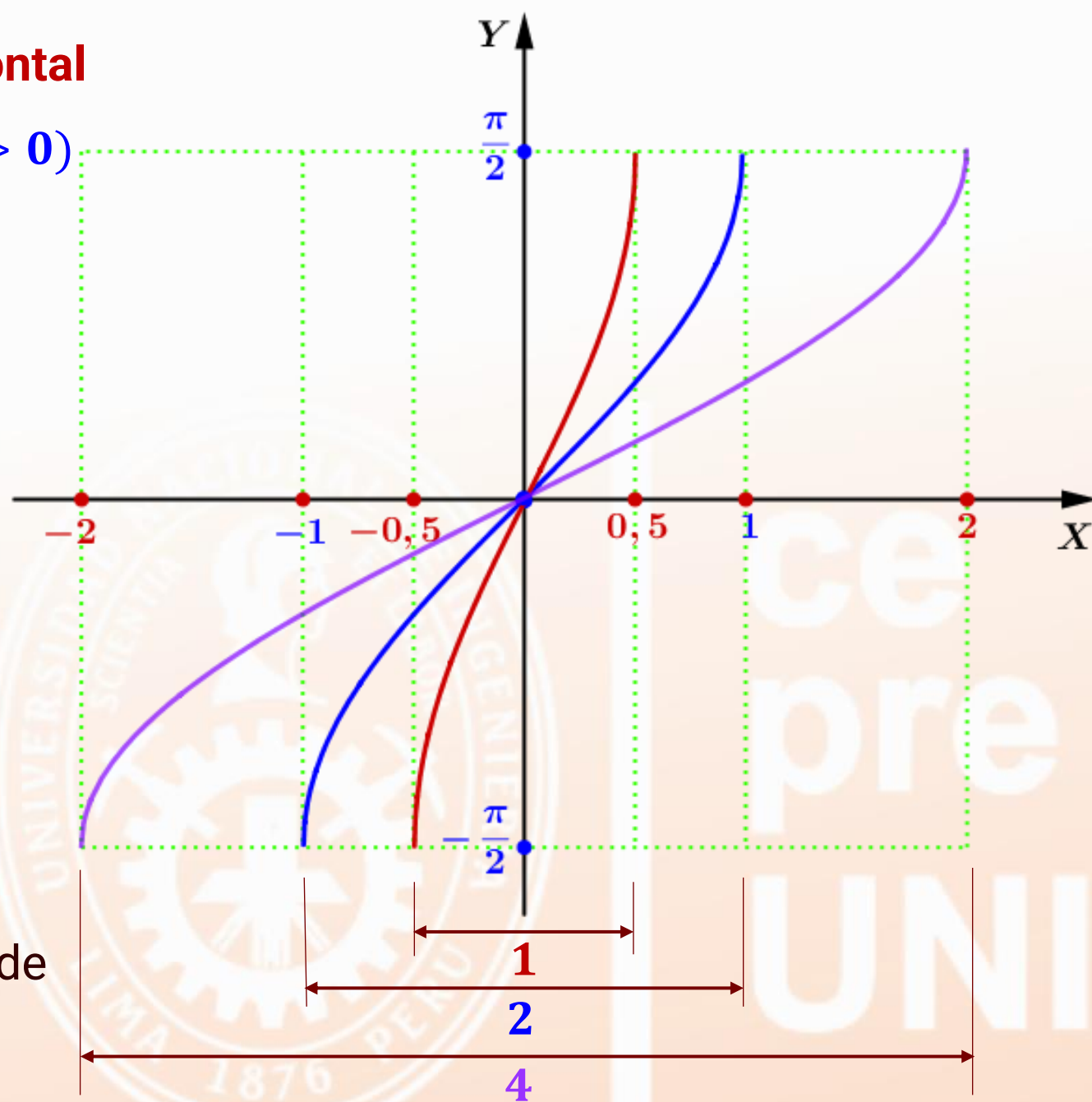
2. Expansión o contracción horizontal

$$f(x) = A \cdot \text{arcFT}(Bx + C) + D \quad (B > 0)$$

Grafiquemos:

	Dominio	Rango
$y = \arcsen(x)$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arcsen(2x)$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$	$[-2; 2]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- ✓ Cuando $B > 1$, la gráfica se contrae horizontalmente.
- ✓ Cuando $0 < B < 1$, la gráfica se expande horizontalmente.



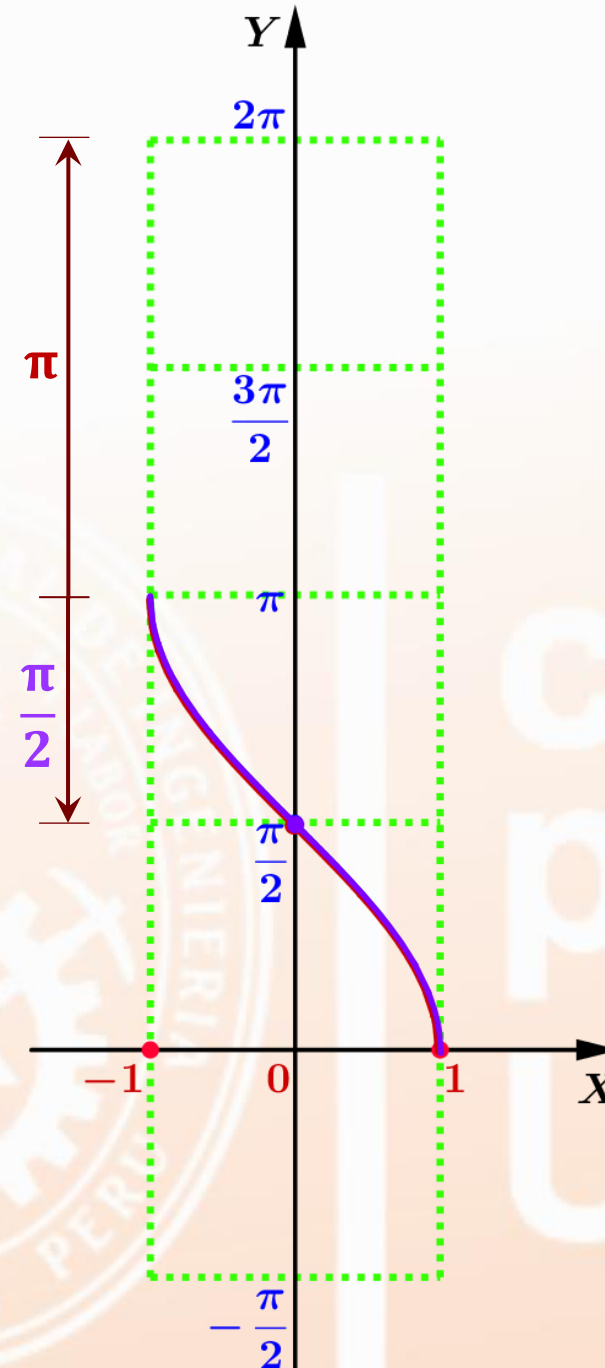
3. Desplazamiento vertical

$$f(x) = A \cdot \arccos(Bx + C) + D$$

Grafiquemos:

	Dominio	Rango
$y = \arccos(x) + \pi$	$[-1; 1]$	$[\pi; 2\pi]$
$y = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$	$[-1; 1]$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

- ✓ Cuando $D > 0$, la gráfica se desplaza hacia arriba.
- ✓ Cuando $D < 0$, la gráfica se desplaza hacia abajo.

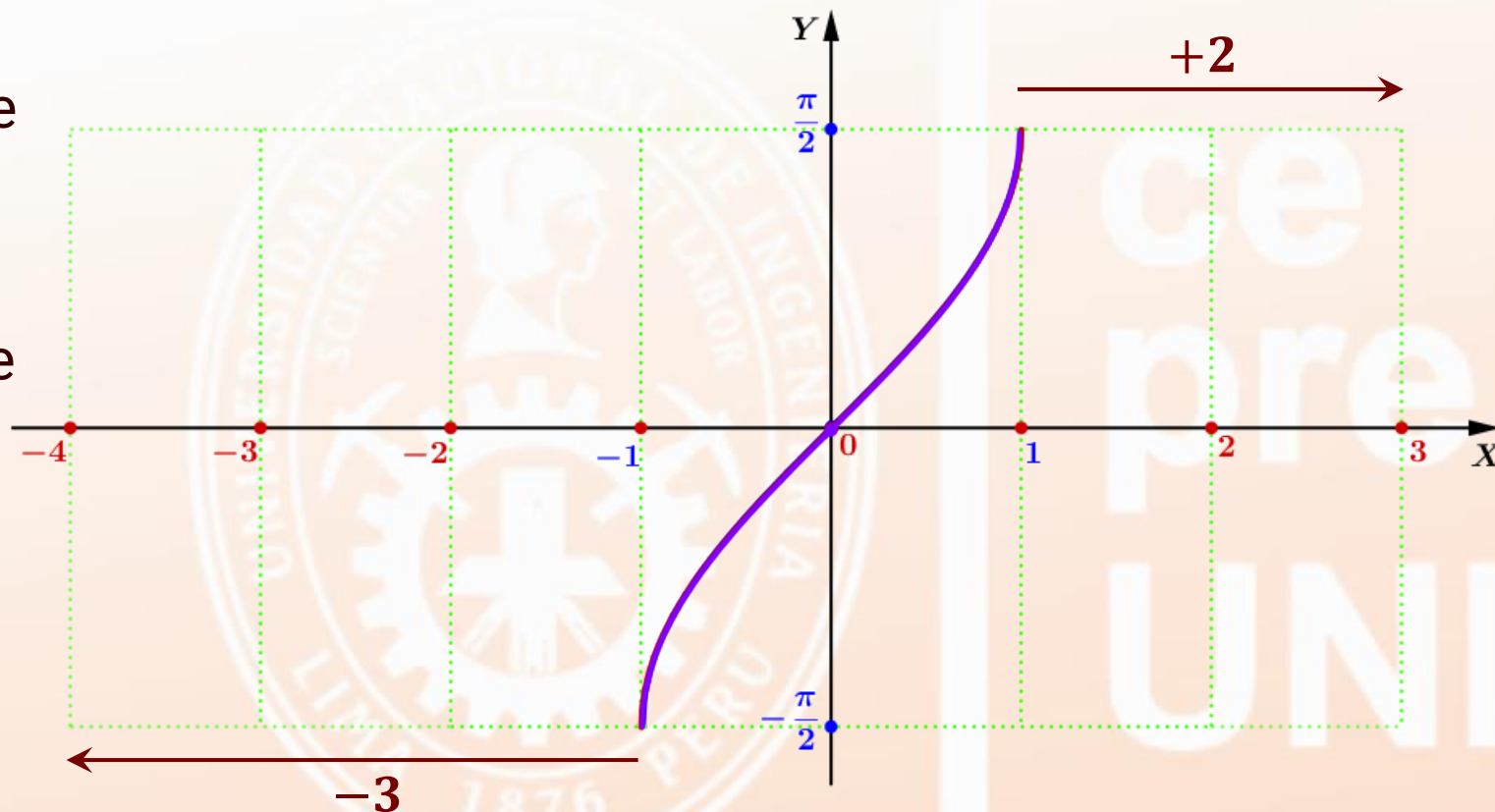


4. Desplazamiento horizontal

$$f(x) = A \cdot \text{arcFT}(Bx + C) + D$$

	Dominio	Rango
$y = \arcsen(x - 2)$	$[1; 3]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arcsen(x + 3)$	$[-4; -2]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- ✓ Cuando $-\frac{C}{B} > 0$, la gráfica se desplaza horizontalmente hacia la derecha.
- ✓ Cuando $-\frac{C}{B} < 0$, la gráfica se desplaza horizontalmente hacia la izquierda.

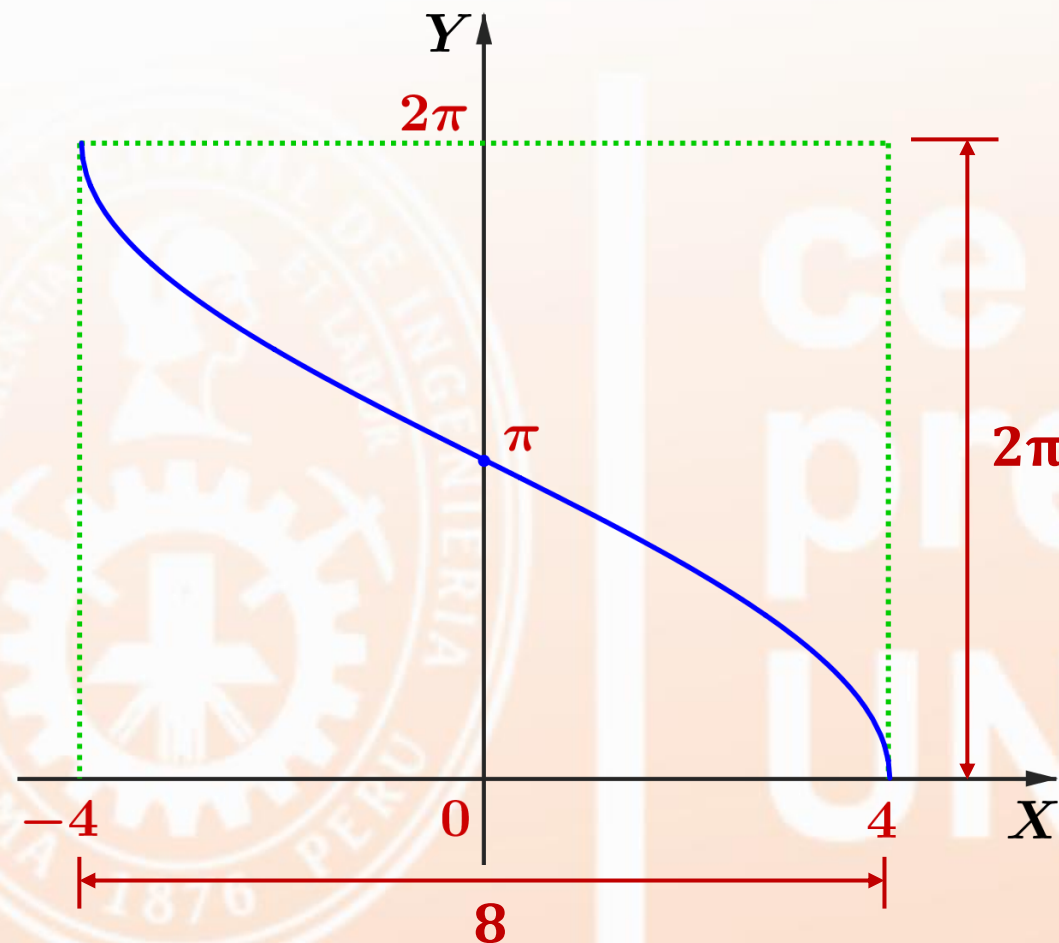


Observación

Una forma práctica para obtener la gráfica de una función trigonométrica inversa de la forma $y = A \cdot \text{arcFT}(Bx + C) + D$; $A > 0, B > 0$ es determinando previamente su dominio y rango.

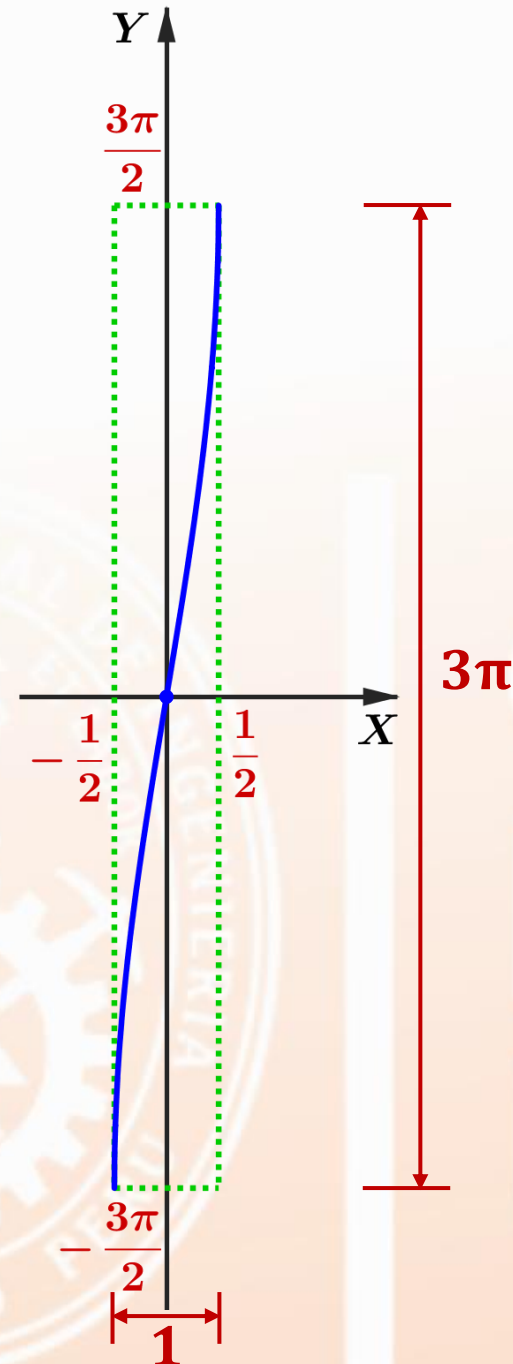
Ejemplo 1

	Dominio	Rango
$y = 2\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$	$[-4; 4]$	$[0; 2\pi]$



Ejemplo 2

	Dominio	Rango
$y = 3\arcsen(2x)$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$	$\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$



Ejemplo 3

Trace la gráfica de f si $f(x) = 3\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

Dominio

$$\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

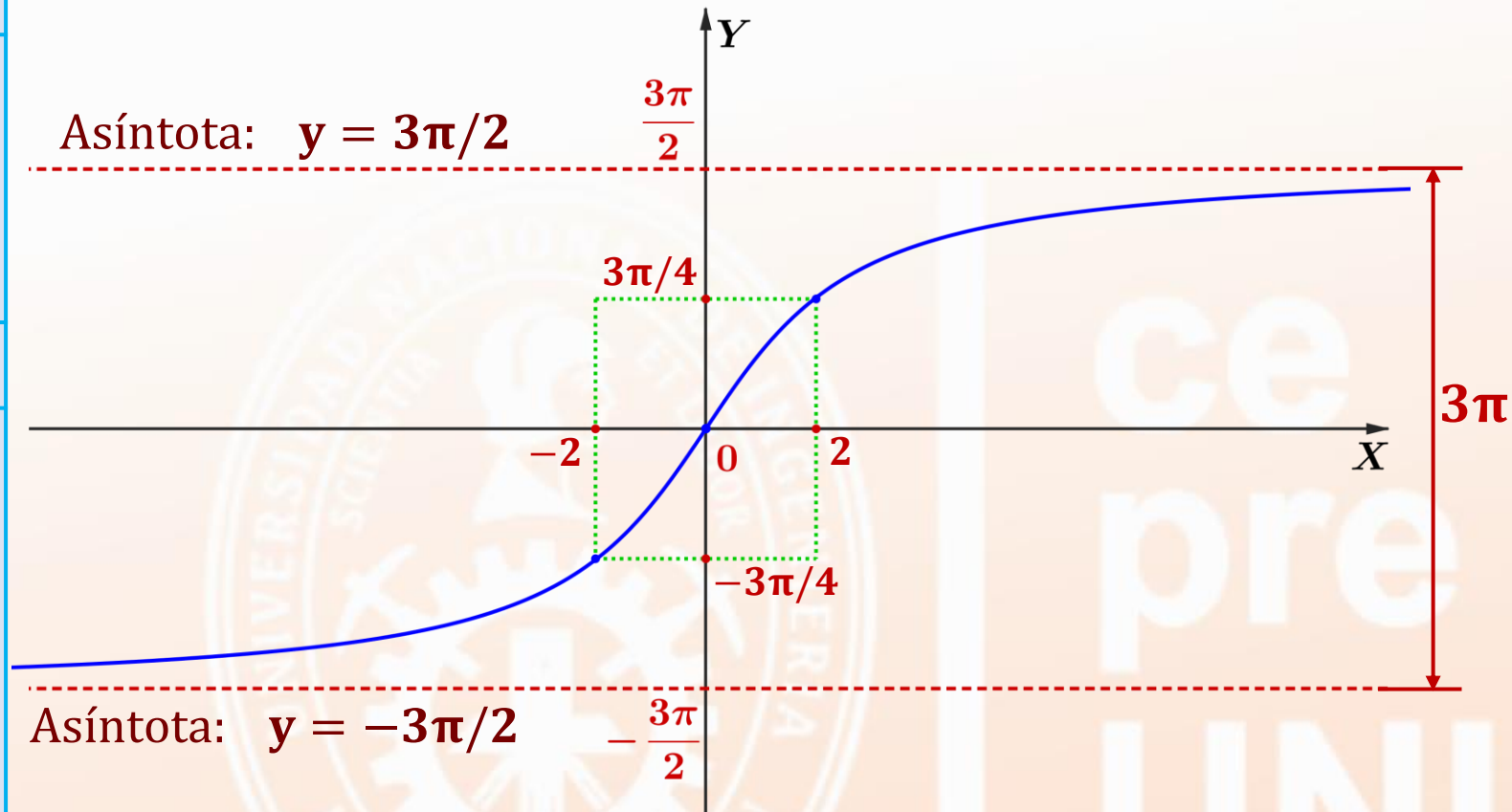
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Rango

$$\forall x \in \mathbb{R}: \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \in \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{Ran}(f) = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$



Ejemplo 4 Trace la gráfica de f si $f(x) = 3\arcsen\left(\frac{x-4}{5}\right) + \pi$

Dominio

Restringimos: $-1 \leq \frac{x-4}{5} \leq 1$

$$-5 \leq x-4 \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq 9$$

$$\text{Dom}(g) = [-1; 9]$$

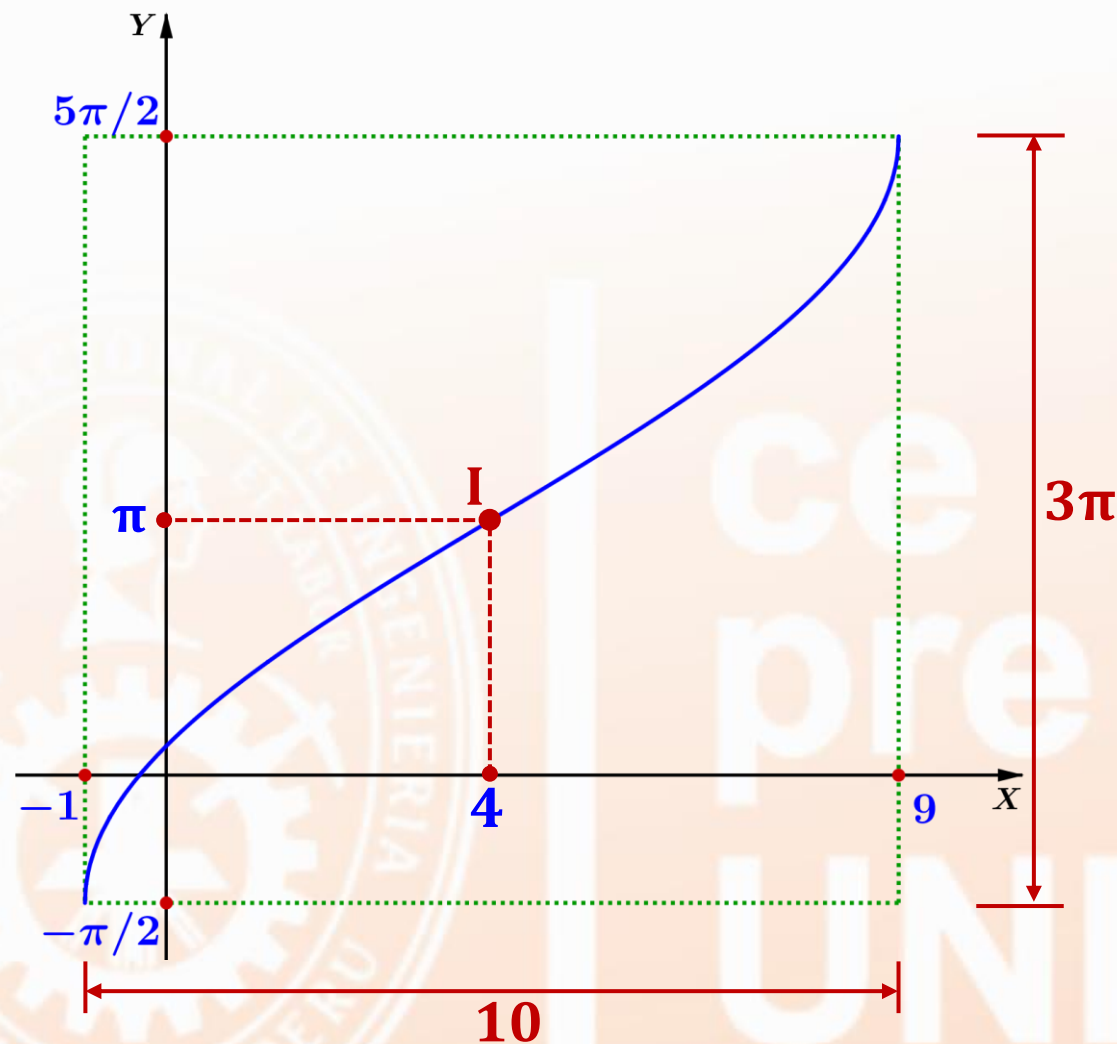
Rango

Dado que: $-1 \leq \frac{x-4}{5} \leq 1$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen\left(\frac{x-4}{5}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3\arcsen\left(\frac{x-4}{5}\right) + \pi \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{Ran}(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

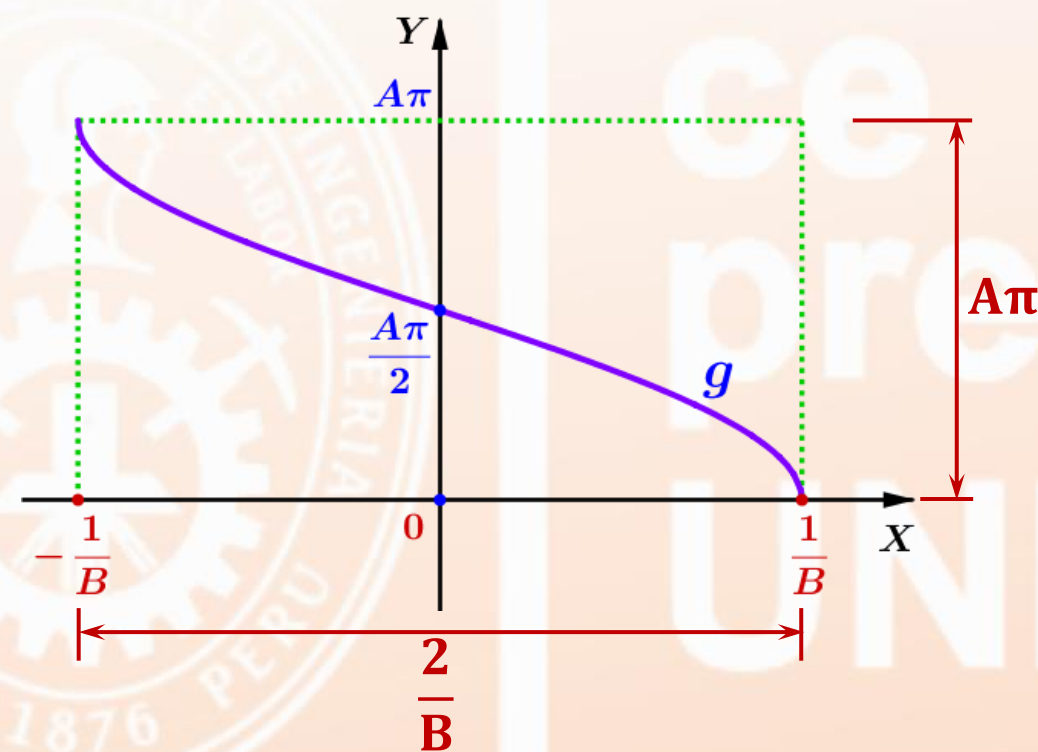
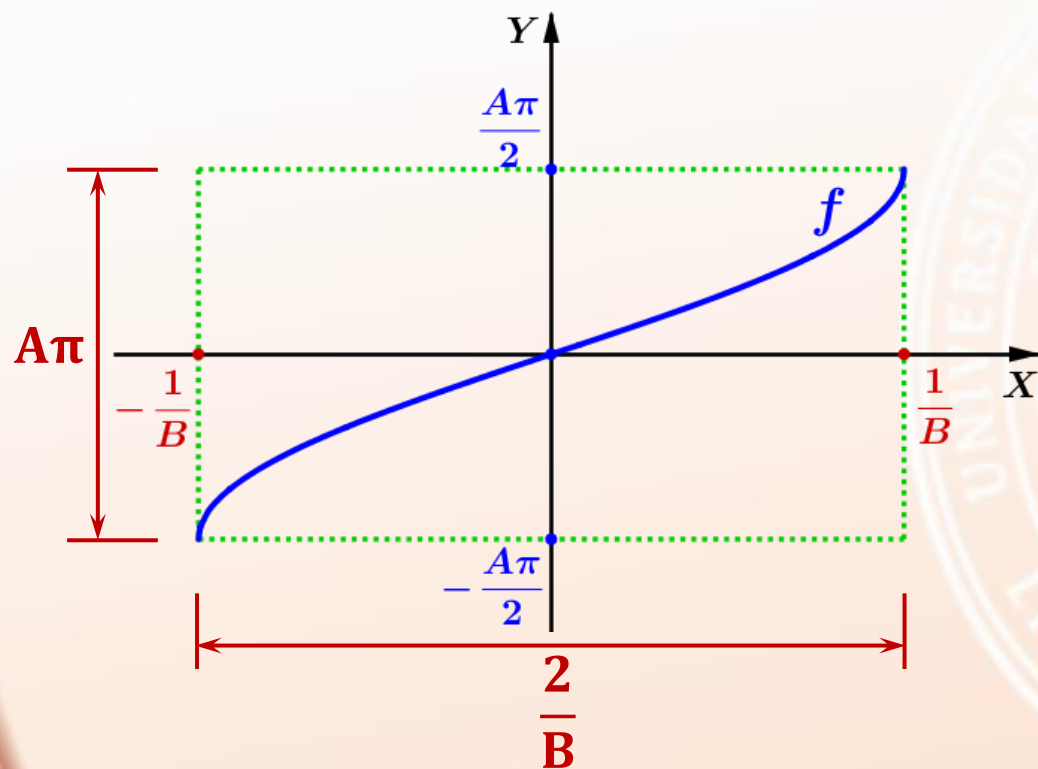


OBSERVACIÓN 1:

Para las funciones arco seno y arco coseno cuya regla de correspondencia es de la forma: $f(x) = A \cdot \arcsen(Bx)$; $g(x) = A \cdot \arccos(Bx)$, $A > 0$, $B > 0$ se cumple:

$$\text{Dom}(f) = \left[-\frac{1}{B}; \frac{1}{B}\right] \quad \text{Ran}(f) = \left[-\frac{A\pi}{2}; \frac{A\pi}{2}\right]$$

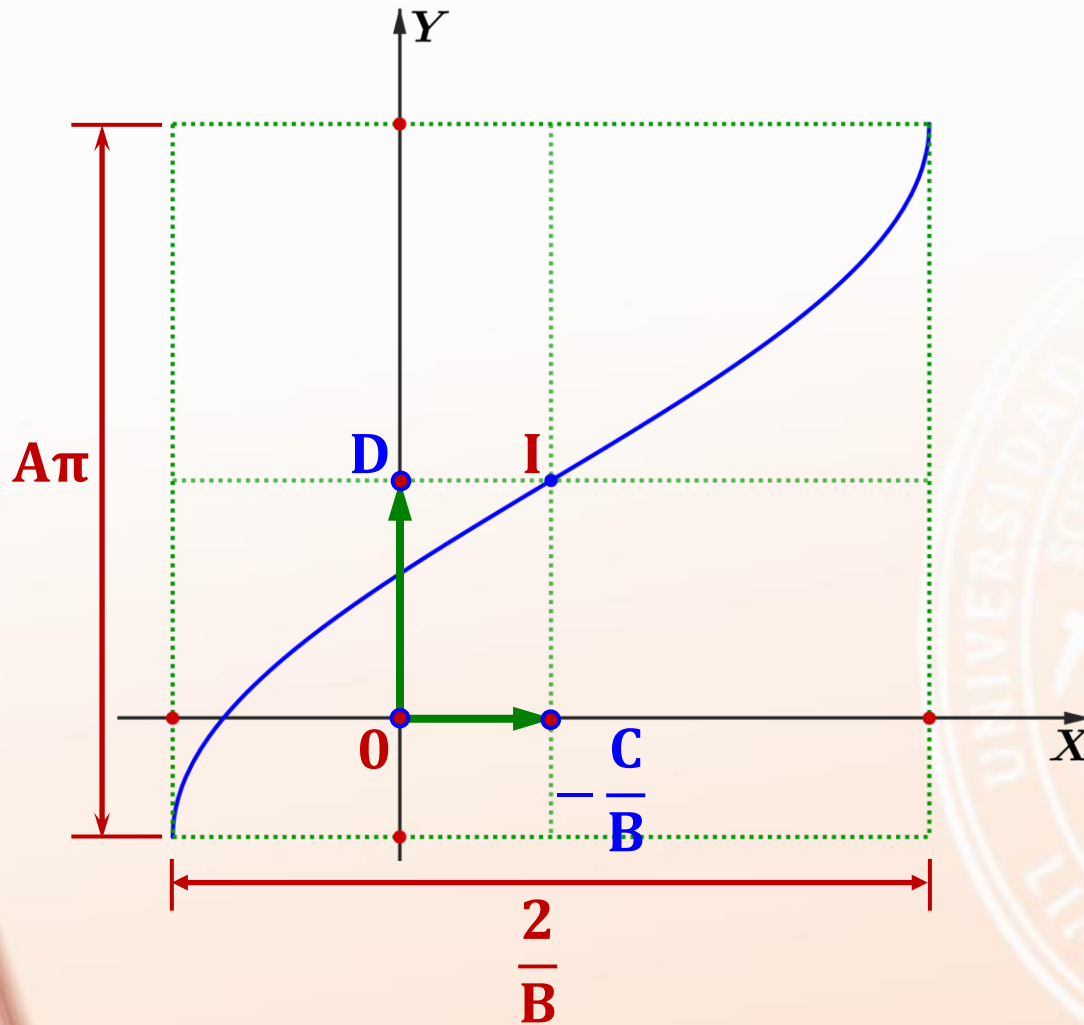
$$\text{Dom}(g) = \left[-\frac{1}{B}; \frac{1}{B}\right] \quad \text{Ran}(g) = [0; A\pi]$$



OBSERVACIÓN 2:

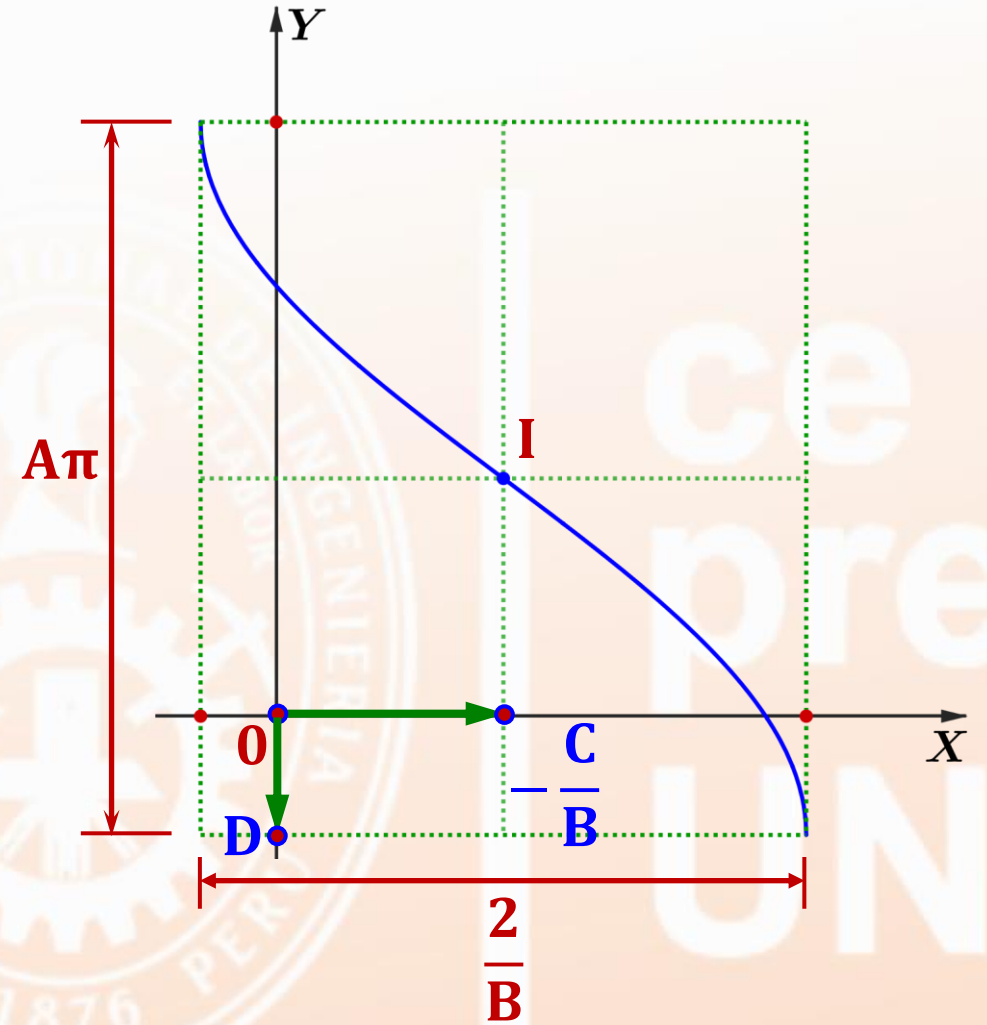
$$f(x) = A \cdot \arcsen(Bx + C) + D$$

$$(A > 0; B > 0)$$



$$f(x) = A \cdot \arccos(Bx + C) + D$$

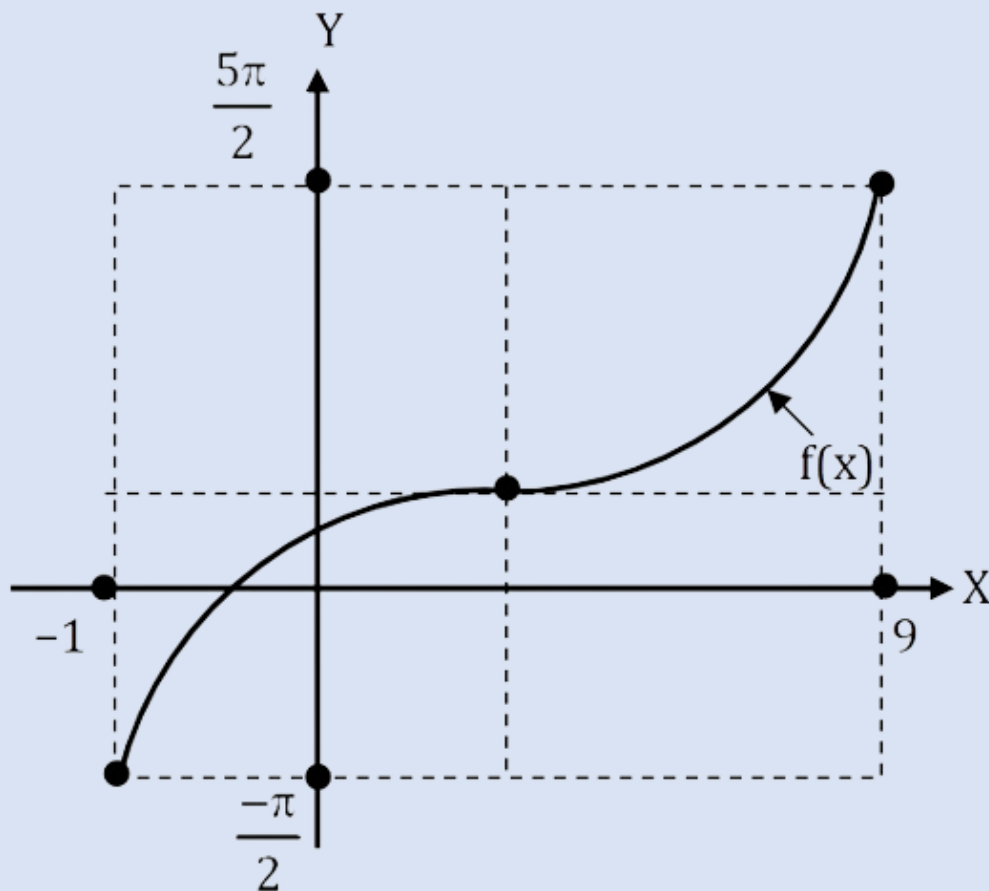
$$(A > 0; B > 0)$$



Problema 16 (Prob. 62 del material de estudio)

En la gráfica mostrada, la regla de correspondencia de la curva es:

$f(x) = A \cdot \arcsen(Bx + C) + D$, calcule el valor de $\frac{(A + B + C)\pi}{D}$



A) 2

D) 4

B) $\frac{12}{5}$

E) $\frac{22}{5}$

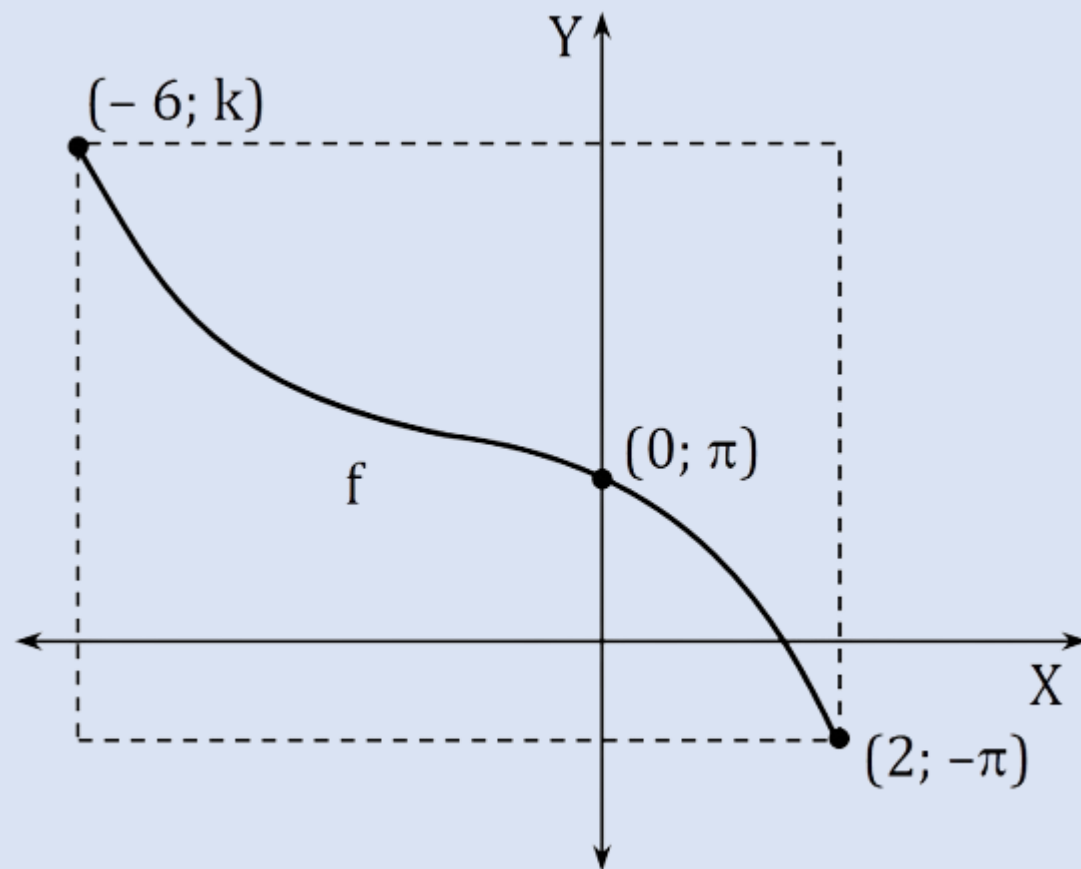
C) $\frac{16}{5}$

CLAVE: B

Problema 17 (Prob. 64 del 2do material de estudio 24-2)

Dada la gráfica de la función f definida por

$f(x) = A \cdot \arccos(Bx + C) + D$, ($B > 0$) calcule el valor de A



A) 4

D) 7

B) 5

E) 8

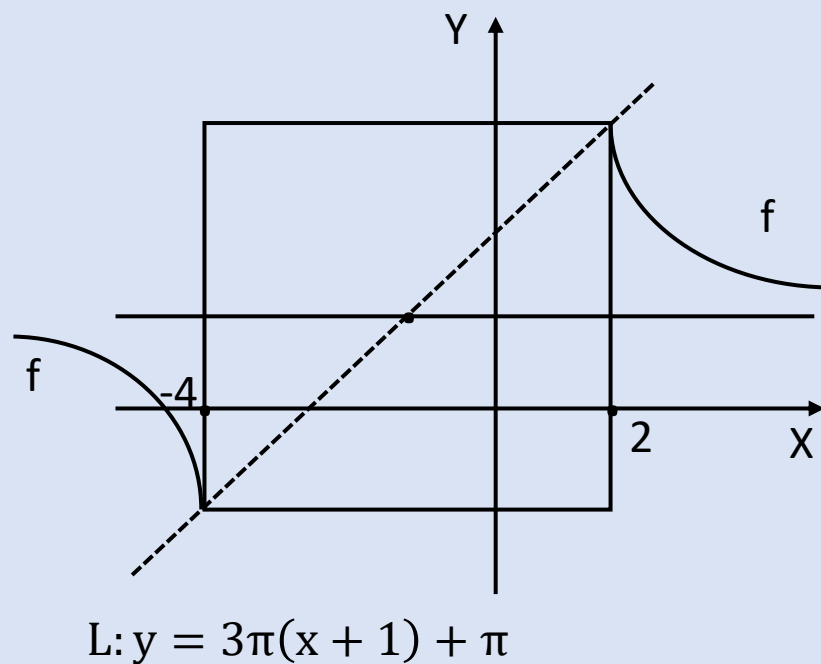
C) 6

CLAVE: C

Problema 18 (Prob. 65 del 2do material de estudio 24-2)

La gráfica corresponde a la función

$f(x) = A \cdot \operatorname{arccsc}(Bx + C) + D$, calcule el valor de $f(5)$.



A) π

D) 4π

B) 2π

E) 5π

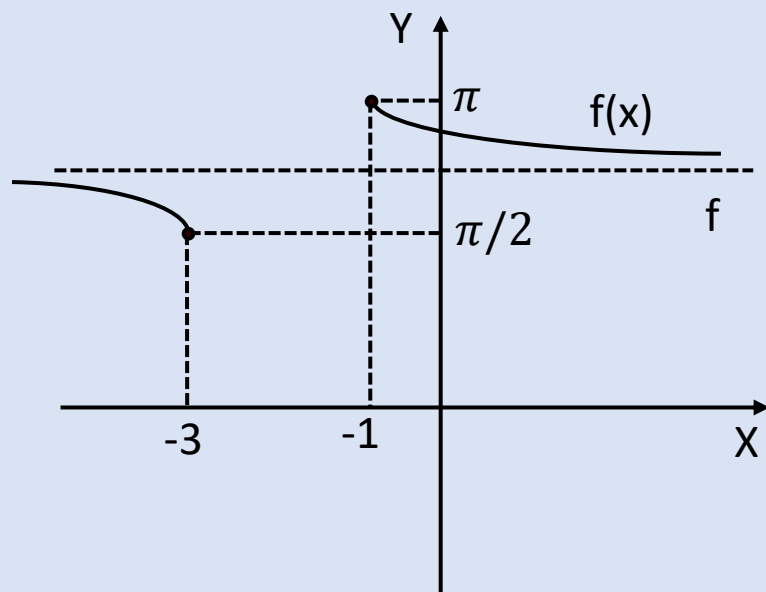
C) 3π

CLAVE: D

Problema 19 (Prob. 68 del 2do material de estudio 24-2)

La gráfica mostrada tiene la siguiente regla de correspondencia

$f(x) = A \cdot \operatorname{arccsc}(Bx + C) + D$, ($B > 0$), calcule el valor de $A \cdot C - B + D$.



A) 1

D) $\frac{\pi}{2}$

B) 2

E) $\frac{3\pi}{4}$

C) 3

CLAVE: E